Chapter 9

> 说明：$\dot{x}$表示x对时间的一阶导数，$\ddot{x}$表示x对时间的二阶导数

9-1

解:

代入初值，得:

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= 0.06 \\ -3\pi A\sin\varphi &= -0.24 \end{aligned} \qquad \text{(SI)}$$

解得:

$$\begin{aligned} A &= 6.52\times 10^{-2} \quad \mathrm{m} \\ \varphi &= \arctan(-0.637) = -32.5^{\circ} \end{aligned}$$

9-2

解:

设振动表达式为$x = A\cos(\omega t+\varphi)$，得:

$$\begin{aligned} v_m &= A\omega \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \omega &= 1.5 \quad \mathrm{rad\cdot s^{-1}} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故振动表达式为:

$$x = 0.02\cos(1.5t+\frac{\pi}{2}) \qquad \text{(SI)}$$

9-3

解:

- (1)
  由题意可知，物体振动表达式为$x = A\cos\omega t$，其中

$$
\begin{aligned}
A &= 4.8 \times 10^{-2} \quad \mathrm{m} \\
\omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{3}\pi \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}}
\end{aligned}
$$

  带入$t = 0.5\ \mathrm{s}$，得:

$$
x = \frac{A}{2} = 2.4 \times 10^{-2} \quad \mathrm{m}
$$

- (2)
  得:

$$
\cos\omega t = \frac{1}{2}
$$

  得最小的$t = 0.5\ \mathrm{s}$

9-4

解:

设$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 由图可知:

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{T} = \pi \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \\
A &= 10 \quad \mathrm{m} \\
\varphi &= -\frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

故得:

$$
x = 10\cos(\pi t - \frac{2}{3}\pi) \qquad \mathrm{(SI)}
$$

9-5

解：

- (1)
  设摆角为θ，有$\theta \ll 1$，设总能量为E，以圆心处为势能零点。有：
  $$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta$$
  由能量守恒，有：
  $$\frac{dE}{dt} = 0$$
  代入且利用$\theta \ll 1$，得：
  $$\begin{aligned} mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgr\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0 \\ \Rightarrow \dot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0 \end{aligned}$$
  为简谐运动方程。
- (2)
  由(1)可得：
  $$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$
  故：
  $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

9-6

解：

- (1)
  设浸没深度为h。
  $$\rho l^3\ddot{h} = \rho l^3 g - \rho_w l^2 hg$$
  有$h = a$时平衡，进行换元$h = a + x$，得：
  $$\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$$

为简谐运动。

- (2)
  由(1)得：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

  由题目所给条件，有：

$$A = |b - a|$$

9-8

解：

能量表达式：

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

由能量守恒$\frac{dE}{dt} = 0$：

$$m\ddot{x} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^+ R^2)^{3/2}} = 0$$

利用$x \ll R$，得：

$$\ddot{x} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}x = 0$$

为简谐运动，振动周期为：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m R^3}{Qq}}$$

9-10

解：

- (1)

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 0.25 \text{ m}$$

- (2)

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.2\ \mathrm{J}$$

$$E_k = E - U = 0.6\ \mathrm{J}$$

- (3)

$$v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2.5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

9-12

解:

- (1)
  有$E_k = E_p$且$E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$，故有:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}kA^2$$

  得:

$$x = 3\sqrt{2} \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

- (2)

$$\sin \Delta\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = 0.75\ \mathrm{s}$$

9-14

- (1)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = 5\ \mathrm{m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = 0.40\ \mathrm{rad}$$

- (2)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_3^2 + A_1 A_3 \cos(\varphi - \frac{\pi}{3})}$$

故有：

当$\varphi = \frac{\pi}{3}$时，合振幅最大；当$\varphi = \frac{4\pi}{3}$时，合振幅最小。