Chapter 6

6-1

解：

由库仑定律，取一小段距P点距离为r，长度为dr的棒，有：

$$dF=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qqdr}{L}r^{-2}$$

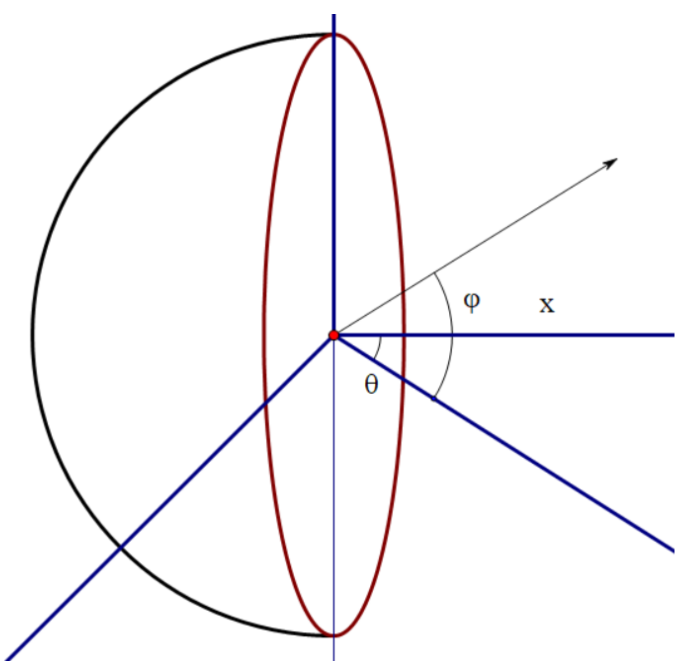
得：

$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{L}\int_{a-L/2}^{a+L/2}r^{-2}dr=\frac{1}{\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{4a^2-L^2}$$

F的方向沿OP。

6-3

解：



如图建立坐标系。分析可得，电场强度沿x轴。
取φ角处张角为$d\varphi$的圆环，有：

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2 \sin\varphi d\varphi}{R^2}\cos\varphi$$

得:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

方向沿x轴。

6-5

解:

- (1) 对导线$+\lambda$，做以其为中轴线，半径为r的圆柱面,截取高为l的一段。由高斯定理可得:

$$2\pi Rl \cdot E(r) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

  代入此题情景，得:

$$E(x) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(a-x)}$$
$$= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 x(x-a)}$$

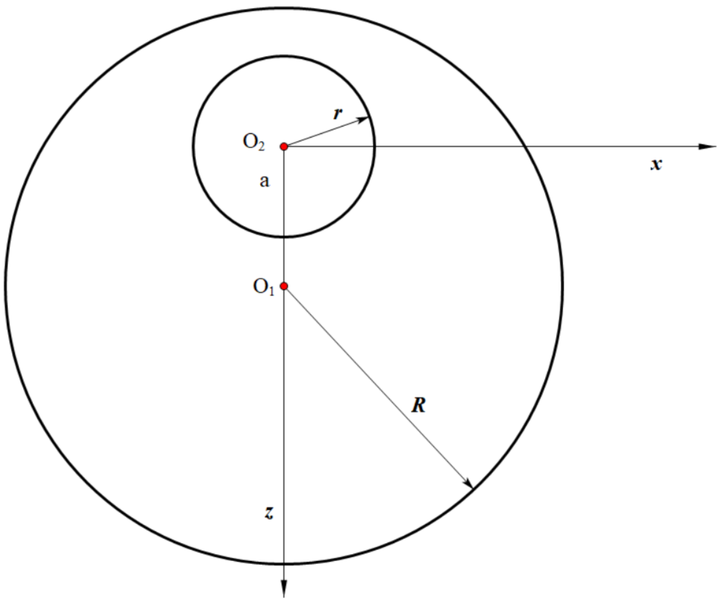
- (2) 代入导线处另一条导线的电场强度，得:

$$\frac{dF}{dl} = E \cdot \lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 a}$$

6-6

解:

等效为两个带电体：完整的半径为R、电荷密度为ρ的球，和半径为r、电荷密度为$-\rho$的球。



小球的电场强度为：

$$\overrightarrow{E_1} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{r_0}$$

大球的电场强度为：

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{O_2O_1})$$

得：

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$

取模长：

$$E = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}$$

6-8

解：

取立方体六面为高斯面，由对称性，三面电场强度通量为0,另外三面电场强度通量相等，设为Φ。由高斯定理：

$$3\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

解得：

$$\Phi = \frac{q}{3\epsilon_0}$$

6-10

解:

对O点:

$$U_O = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_l^{2l} \lambda x^{-1} dx + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{2l}^{3l} \lambda x^{-1} dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{3}{4}$$

对P点:
分析:由对称性，可知BP及其延长线上的电场强度方向与$\overrightarrow{AC}$相同，垂直于BP。故将P点上一个电荷沿BP移向无穷远，电场力不做功。故P点与无穷远处等电势，即:

$$U_P = 0$$

6-11

解:

由球对称性，电场方向沿径向。

- 在内部:

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \int_0^r \frac{k}{r} 4\pi r^2 dr = 2k\pi r^2$$

  解得:

$$E(r) = \frac{k}{2\epsilon_0}$$

- 在外部:

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 2k\pi R^2$$

  解得:

$$E(r) = \frac{k}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

综上，电场强度为：

$$E(r)=\begin{cases}\frac{k}{2\epsilon_0}, & r\in[0,r]\\ \frac{k}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{r^2}, & r\in[r,+\infty)\end{cases}$$

由$U(r)=-\int_\infty^r Edr$，得：

$$U(r)=\begin{cases}\frac{k}{2\epsilon}(2R-r), & r\in[0,r]\\ -\frac{k}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{r}, & r\in[r,+\infty)\end{cases}$$

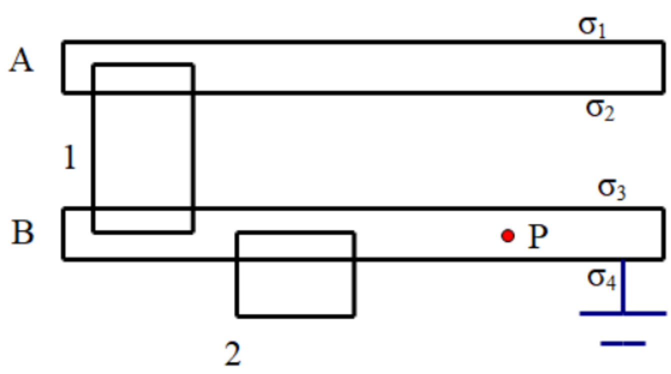
6-13

解：

$$A=-\Delta W=\frac{2q\cdot q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R}-\frac{1}{3R})=\frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 R}$$

6-16

解：



取如图1，2两个高斯面。由于下极板接地，故下极板以下无电场，又导体内部没有电场。由高斯定理解得：

$$\sigma_2+\sigma_3=0$$
$$\sigma_4=0$$

对P点分析,由p的电场强度为0得：

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$$

又有：

$$
(\sigma_1+\sigma_2)S=Q_1
$$
$$
(\sigma_3+\sigma_4)S=Q_2'
$$

解得：

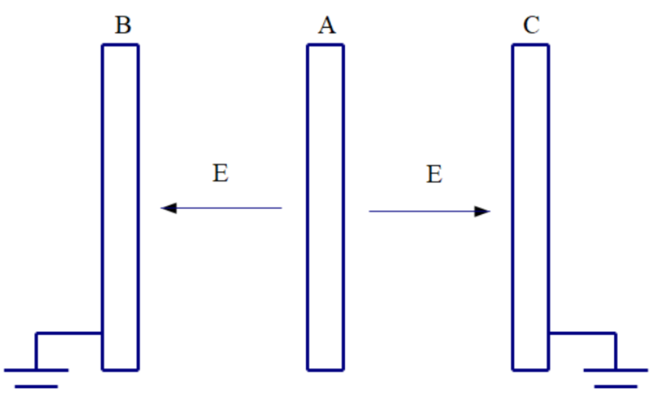
$$
\begin{cases}\sigma_1=\sigma_4=0\\ \sigma_2=-\sigma_3=\frac{Q_1}{S}\end{cases}
$$

故A、B间电场强度为：

$$
E=\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}
$$

6-17

解：



- (1) 由B、C板电势相同，得：

$$
\frac{q_B d_{AB}}{\epsilon_0 S}=\frac{q_C d_{AC}}{\epsilon_0 S}
$$

  又有：

$$
q_B+q_C=-Q_A
$$

  得：

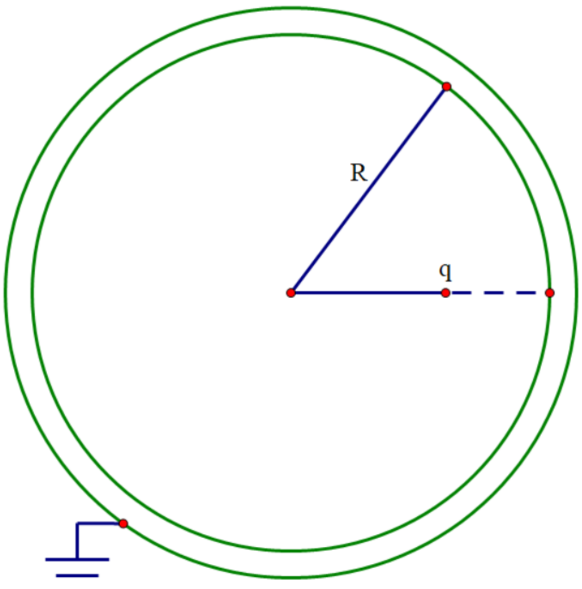
$$
\begin{cases}q_B=-1.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}\\ q_C=-2.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}\end{cases}
$$

- (2)

$$U_A = E \cdot \frac{d}{2} = \frac{q_B d_{AB}}{2\epsilon_0 S} = 2.26 \times 10^4 \text{ V}$$

6-18

解：



由于静电屏蔽，球壳外无电场，球壳内表面带上总和为$-q$的电荷。故有：

$$U_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{d} - \frac{1}{R})$$

6-21

解：

- (1) 由高斯定理易得：

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} 0, & r \in [0, R_1) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\boldsymbol{e_r}, & r \in (R_1, R_2) \\ 0, & r \in (R_2, R_3) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{r^2}\boldsymbol{e_r}, & r \in (R_3, +\infty) \end{cases}$$

- (2)

$$W_e = \iiint\limits_{\Omega} w dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

- (3) 代入，得：

$$W_e = 6 \times 10^{-4} \text{ J}$$

6-23

解：

- 电容器能量公式：

$$W = \frac{1}{2}C(\Delta U)^2 = 4\pi\epsilon_0(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})(\Delta U)^2$$

- 电场能量公式：

$$Q = C\Delta U$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$W = \iiint\limits_{\Omega} w dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

  联立解得：

$$W = 4\pi\epsilon_0(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})(\Delta U)^2$$