Chapter 2

> 说明：
>
> 1. $\dot{x}$表示x对时间的一阶导数，$\ddot{x}$表示x对时间的二阶导数。
> 2. 粗体字母表示矢量。

2-4

解:

取微元dx，有：

$$dF_T = x\lambda\omega^2 dx$$

其中$\lambda = m/L$,为绳子的线密度。积分得：

$$F_T(x) = \frac{m\omega^2}{2L}(L^2 - x^2)$$

2-6

解：

- (1)
  有:

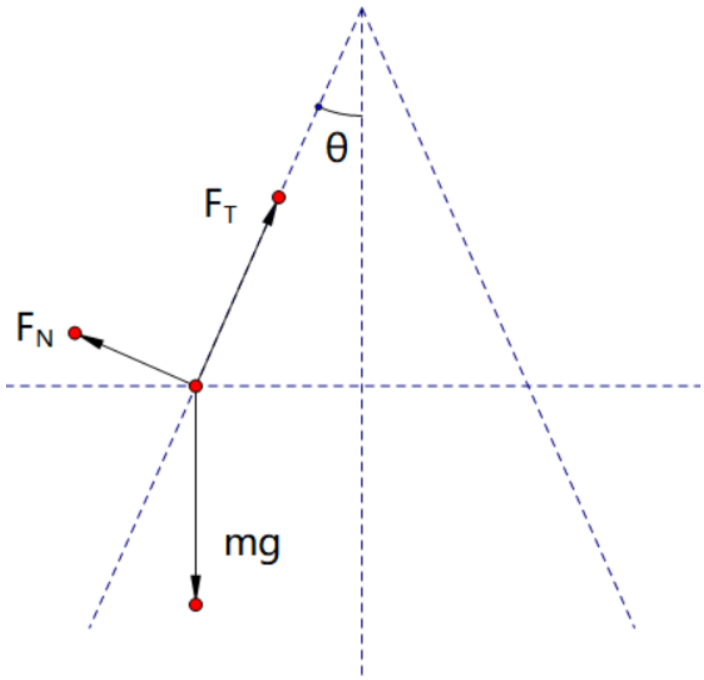
$$\begin{cases} mg\cos\theta + F_T = m\frac{v^2}{R} \\ ma_t = mg\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_T & = m\frac{v^2}{R} - mg\cos\theta \\ a_t & = g\sin\theta \end{cases}$$

- (2)
  有：$|a_t| = g|\sin\theta|$，方向垂直于半径向下。

2-8

解：

- (1)



沿绳与垂直于面的方向分解，有：

$$\begin{cases} F_T = mg\cos\theta + m\omega^2 l\sin^2\theta \\ F_N = mg\sin\theta - m\omega^2 l\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

- (2)
  即$F_N = 0$时。令$F_N = 0$，有:

$$mg\sin\theta = m\omega_0^2 l\sin\theta\cos\theta$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

代入得:

$$F_T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

2-10

解:

$$W = \int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = F(h-h_0)(\csc\theta_0 - \csc\theta_1) = 18.26(\mathrm{J})$$

2-13

解:
由功能原理，得:

$$W_{tot}=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2) \tag{1}$$

由运动方程求对时间求一阶导数，得:

$$\begin{cases}\dot{x}=5\\ \dot{y}=t\end{cases}\text{(SI)} \tag{2}$$

联立代入$t=2s\rightarrow 4s$，得:

$$W_{tot}=3\mathrm{J}$$

2-14

解:
有两颗中子星的速度等大反向，设大小为v。由能量守恒，得:

$$\begin{aligned}2\times\frac{1}{2}mv^2&=Gm^2(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0})\\ \Rightarrow v&=\sqrt{Gm(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0})}\\ \xRightarrow{r_1=\frac{1}{2}r_0} v&=\sqrt{\frac{Gm}{r_0}}\end{aligned}$$

代入得:

$$v=8.17\times10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

2-15

解:
由功能关系，得:

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2+\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

解得:

$$F=\sqrt{\frac{3}{4}kmv_0^2}$$

2-16

解:
由能量守恒，有:

$$mgR=\frac{1}{2}mv^2-W_f$$

解得:

$$W_f=-42.4\mathrm{J}$$

2-17

最远位移有$\dot{x}=0$，即$v=0$。由能量守恒有:

$$Fx=\mu mgx+\frac{1}{2}kx^2$$

排除$x=0$的解，解得:

$$x=2\frac{F-\mu mg}{k}$$

则系统弹性势能:

$$E_{pk}=\frac{1}{2}kx^2=2\frac{(F-\mu mg)^2}{k}$$

2-20

解:

- 动量定理

$$\boldsymbol{I}=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1=-m\omega R\boldsymbol{i}-m\omega R\boldsymbol{j}$$

- 积分法
  受力分析:

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-m\omega^2\boldsymbol{r}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{F}=m\omega^2R(-\boldsymbol{i}\cos\omega t-\boldsymbol{j}\sin\omega t)$$

代入冲量定义

$$I=m\omega^2R\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}(-\boldsymbol{i}\cos\omega t-\boldsymbol{j}\sin\omega t)dt=-m\omega R\boldsymbol{i}-m\omega R\boldsymbol{j}$$

2-22

解:

子弹穿过第一个木块的过程，由冲量定理:

$$(m_1+m_2)v_A=F\Delta t_1 \tag{1}$$

子弹穿过第二个木块的过程，由冲量定理:

$$m_2(v_B-v_A)=F\Delta t_2 \tag{2}$$

解得:

$$\begin{cases}v_A=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}\\ v_B=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_2}\end{cases}$$

2-23

解:

$$\begin{cases}2ma_0=mg\\ \frac{1}{2}a_0t^2=L\\ v_0=a_0t\\ 3mv_1=2mv_0\end{cases}$$

联立解得:

$$v_1=\frac{2}{3}\sqrt{gL}=\frac{14}{15}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

2-24

解：

取船的原速方向为正方向。对三艘船分别使用动量守恒(其中b代表前船，m代表中船，a代表后船)：

$$\begin{cases}(m'+m)v_b=m'v+m(v+u)\\(m'-2m)v_m+m(v+u)+m(v-u)=mv\\(m'+m)v_a=m'v+m(v-u)\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}v_b=v+\frac{m}{m'+m}u\\v_m=v\\v_a=v-\frac{m}{m'+m}u\end{cases}$$

2-28

解：

设B点后的链条长度为x，链条线密度为λ，有：

$$\lambda L\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda xg\sin\alpha$$

作变换：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

得：

$$\begin{aligned}&Lvdv=xdxg\sin\alpha\\&\Rightarrow v=\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}(L^2-a^2)}\end{aligned}$$